数理解析研究所講究録
第1787巻 2012年 265-279

近代日本における，函数の概念とそれに関連したことがらの受容と普及

立教大学名誉教授　公田　藏　(Osamu Kota)
Professor Emeritus, Rikkyo University

1.

わが国に函数の概念がもたらされたのは幕末である．本稿では幕末（1860年代）から大正初期（1910年代初期）までの約半世紀に，函数の概念と函数にかかわることがらが，どのように受容され，広まっていったかについて考察する（その後の時代については別に述べる予定である)．

この時代には，函数の定義として，次の三通りがあった．

(1)　函数 = 式

(2)　相伴って変化する数（あるいは量）

(3)　（一意）対応，あるいは対応関係

以下に述べるように，この当時にわが国にもたらされていた函数を扱った書物では，定義として (2) を採用している場合が多かったが，学習者は，函数は式であると認識した場合が多かったと思われる．なお (3) が函数の定義としてひろく採用されるようになるのは，その後のことである．

2.

幕末や明治初期において，わが国で「函数」の概念に接したのは，「西洋高等数学」の一分科である微分積分学の一端を学んだ，ごく少数の人々，すなわち，西洋人教師から高等数学を学んだか，もしくは西洋数学書または漢訳西洋数学書によって微分積分学の一端に接した，ごく少数の人々であった．この時期に，わが国における函数概念の受容に影響を及ぼしたのは，漢訳西洋数学書の『代微積拾級』と『微積溯源』とであったと考える．前者は米国の Elias Loomis の著書 “Elements of Analytical Geometry and of Differential and Integral Calculus”（初版1850）の，Alexander Wylie（偉烈亜力）と李善蘭による中国語訳で，後者は英国の Wallace の原著（*Encyclopaedia Britannica* 第8版の “fluxions” の項目）の，John Fryer（傅蘭雅）と華蘅芳による中国語訳である．

『代微積拾級』は全18巻で，本文は縦書きで記されているが，式は，いわゆる中国式記号法で横書きで記されている．数字や文字は漢字を用い，アルファベットの最初の10個 $a, b, \ldots, j$ には甲，乙，...，癸の十干，次の12個 $l, m, \ldots, v$ には子，丑，...，亥の十二支，残りの w, x, y, z には物，天，地，人を当て，ギリシャ文字 $\alpha, \beta, \ldots$ には角，亢，...の二十八宿を用いている．大文字は口偏をつけて表す．たとえば甲は a，呷は A，味は R である．凡例（全8項目）には次のように記されている．

> 一、書中諸記号、爲古算書所未有、今詳釋之、⊥者、正也、加也、⊤者、負也、減也、右減左也、×者、相乗也、又並列亦爲相乗、如　甲乙　即甲乙二元相乗也、÷者、約也、或作 ─ 、法居上実居下、如 $\frac{甲}{乙}$ 即以甲約乙也、: :: :者、指四率比例也、(　) 者、括諸数爲一数也、名曰括弧、......

＝者、左右二数相等也、如 甲＝乙 謂甲等于乙也、＜者、右大于左也、＞者、左大于右也、彳者微分也、如 彳天 言天之微分也、禾者積分也、如 禾彳天 言天微分之積分也、〇者、無也、∞者、無窮也、

....

一、諸数字之旨各異、函数者、言其数中函元之加減乗約開方自乗諸数也、長数者、言幾何漸増漸減之微数也、変数者、言其数或漸変大、或漸変小、非一定之数也、常数者、言其数一定不変也、

数字は漢数字を用いたため，加法，減法の記号 $+$，$-$ は漢数字の十，一と誤りやすいので，加法，減法の記号としては $\perp$，$\top$ を用いている．分数については，横線の上が分母，下が分子である．これは,「三分之二」のように，分母をさきに述べることによると思われる[1]．「彳天」,「禾彳天」は，原文では，いずれも漢字一字分に作成されて印刷されている．dx，$\int dx$ の中国式表記である．

Wylie と李善蘭により開発された中国式記号法は，その後漢訳西洋数学書でひろく用いられ，数学用語の中国語訳も,『代微積拾級』におけるものをもとにして，改良が加えられた．わが国でも，明治期前半における数学用語や西洋数学書の邦訳に際しては，漢訳西洋数学書の用語は重要な参考資料であった．わが国では，西洋数学書から直接邦訳や翻案がなされたため，中国式記号法はあまり用いられなかった．

凡例の「函数者、言其数中函元之加減乗約開方自乗諸数也」という文言から，凡例では，函数は変数（自変数（函元））の代数式として定義される．「巻十　微分一」には

微分之数有二、一日常数、一日変数、変数以天地人物等字代之、常数甲乙子丑等字代之、

凡式中常数之同数倶不変、如直線之式 地＝甲天⊥乙 則線之甲與乙、倶僅有一同数任在何点永不変、而天與地同数、則毎点皆変也、

凡此変数中函彼変数、則此為彼之函数、如直線之式為 地＝甲天⊥乙 則地為天之函数、

......

設不明顕天之函数、但指地為天之因変数、則如下式、天＝函(地)　地＝函(天) 此天為地之函数、亦地為天之函数、

という文言がある（文中の「同数」は「値」のことである）．ここでは函数について「凡此変数中函彼変数、則此為彼之函数」と記されている．「函」は「はこ」であるが，容れる，つつむ，含むという意味をもつ文字である[2]．従って，この定義によれば，函数とは変数（自変数，ここでは変数「彼」）を含む「式」である．凡例では変数の代数式を函数と呼んでいるが,「巻九　代数幾何九」では簡単な超越曲線（擺線（cycloid），対数曲線，螺線（spiral））が扱われ，代数式ではない式が扱われているので，巻十で函数とは変数を含む式であるというとき,「式」としては代数式には限定されない．実際，微分法では，超越函数の微分法が扱われている．

『微積溯源』は全 8 巻で,「巻一　論変数與函数之変比例」では，第一款で常数と変数について述べられ，第二款には次のような記述がある．文中の「対 天」は $\log x$ の中国式表記である．

---

[1]『代微積拾級』と同じ 1859 年に出版された，Wylie と李善蘭による de Morgan の代数書の中国語訳『代数学』の巻首「綱領」には「凡分数上母下子間之横格、指約法也、如 $\frac{乙}{甲}$、即以乙約甲、乃為甲容若干乙、」とある．「凡分数上母下子」という文言から「母」と「子」の上下関係について問題にするのは思い過ごしであろう．

[2]「函」の中国語の音は han で，英語 function の最初の音節の発音にも似ている．

第二款　若有彼此二数、皆為変数、此数変、而彼数因此数之変而亦変者、則彼数為此数之函数、
如平圓之八線、皆爲弧之函数、若反求之、亦可以弧爲八線之函数、
又如重学中令物体前行之力、與其物所行之路、皆爲時刻之函数、
如有式 $地 = \dfrac{甲丅天}{甲丄天}$ 、此式中、甲爲常数、天爲自主之変数、地爲天之函数、故地之同数、能以天與甲明之、

....

凡変数之函数、其形雖有多種、然每可化之、使不外于以下数類、$天^{卯}$　$甲^{天}$　対 天　正弦 天　餘弦 天 等類是也、
凡函数爲 $天^{卯}$ 之類、其指数爲常数、則可從天之卯方用代数之常法化之、而以有窮之項明其函数之同数、故謂之代数函数、亦謂之常函数、

....

凡函数爲 $甲^{天}$　対 天 之類則其函数之同数不能以有窮之項明之、故謂之越函数、(割注：越者、超越於尋常之意也、)
凡函数爲　正弦 天　餘弦 天　及　正切 天　正割 天　之類則其函数之同数、皆可以平圓之各線明之、故謂之圜函数、亦謂之角函数、
以上三種函数（割注：常函数越函数圜函数也）若已知天之同数、則其函数之同数、即可求得、故名此三種函数爲陽函数、(割注：因其顕而易明、故謂之陽函数、)
更有他種函数、必先解其方程式、令函数中之各変数分開、然後能求其同数者、
如有式 $戊天 = \dfrac{戊丅天}{戊丄天}$ 其戊爲天之函数、如欲求其戊與天相配之同数、必先解其二次方程式始通、
此種之式、名曰天之陰函数、(割注：因其雑糅未明、故謂之陰函数、) 反之、亦可云天爲戊之陰函数、

....

如天之函数、則作 函 天、或作 函 (天)、皆言天之函数也、
所以凡見変数之左旁、有一函字者、其函字並非代天之倍数、其意謂是某変数之函数也、

第二款冒頭の函数の定義「若有彼此二数、皆為変数、此数変、而彼数因此数之変而亦変者、則彼数為此数之函数」によれば，函数は自変数（「此数」）の値の変化に伴って変化する数である．この定義の文言通りに解釈すれば，函数は自変数の式で表される必要はないことになる．しかし，函数を常函数（変数の代数式で表される函数），越函数，圜函数の三種に分類しているので，上の定義はさておき，著者は「函数は変数の式である」と理解しているように思われる．

3．

福田半は『代微積拾級』の訳解を企てるが，福田理軒閲註，福田半訳解『代微積拾級訳解』として出版されたのは『代微積拾級訳解』の巻一だけで，内容は『代微積拾級』の巻一から巻四までの部分，すなわち，代数幾何（analytical geometry，解析幾何）の直線と円に関する部分までであり，微分・積分の部分は出版されず，「代微積」の「代」の部分に止まった．『代微積拾級訳解』巻一の冒頭にある総目録によれば，訳解は，附録の「代微積設例答式解義」を含めて全十巻の予定であった．なお，『代微積拾級訳解』は，日本語で解析幾何を扱った最初の刊本である．

『代微積拾級訳解』では，Loomis の原著も参考にし，式は中国式ではなく，原著の記法で記されている．凡例には，

> 千八百七十一年出版ノ原書ヲ訳解シ又上海訳本ヲ比較シ其書ニ遺漏スル所ハ原書ノ如ク之ヲ補載シ家父ノ註解ヲ加ヘ編輯スト雖トモ余ヤ短見不才尚其任ニアラサレハ必ス其美ヲ尽サヾルコトヲ嘆ス遇々孝平神田先生ノ訳稿ヲ借受ケ以テ潤色ヲ加ヘ速カニ稿ヲ脱ス快然ニ堪ス茲ニ吐露ス

と記されている．神田孝平は『代微積拾級』を筆写しており，この書物を読んだ最初の日本人であると考える．『代微積拾級訳解』の発行は明治 5（1872）年夏であるが，奥付には「官許明治四辛未年十一月」とある．

邦文の最初の微分積分の書物は，福田理軒閲，福田半編『筆算微積入門』全 2 冊（前集，后集）（明治 13（1880）年）である．前集冒頭の凡例には次の文言がある．

> 一微分積分ノ法ハ高等ノ算法ニシテ皇国ノ方円豁理ノ術ト其理相同シク其技大ニ異ナレトモ亦捷径ノコトアルナリ

この文言は，明治初期に，微分積分が和算の知識のある人々にどのように認識されていたかを示している．本文では，函数の定義は

> 彼此ノ二数アリテ皆ナ変数ナルトキハ此数ノ変スルニ因テ彼数モ亦変スルモノハ彼数ヲ此数ノ函数トス故ニ此数ヲ自主ノ変数トシ彼数ヲ函数トシ又因変数トス

であるが，この定義およびそれに続く文章は大体において『微積溯源』の邦訳である．

なお，上に引用した『筆算微積入門』凡例の文言にも関係するが,『筆算微積入門』に収録されている例題（練習問題）の中，文章題には和算的なものが多く見受けられる．

4．

4.1. 東京開成学校は東京大学の前身校の一つであるが，その源は安政 3（1856）年設立の幕府の洋学所で,「蕃書調所」として開校されたのは安政 4 年である．その後組織も名称もしばしば改められた．明治 5 年の学制公布の際に第一大学区第一番中学となるが，明治 6 年に開成学校と改められ，ついで「東京」がつけられた．東京開成学校は専門の学を教授することを目的としたものであったが，外国人教師を招聘して専門学の授業が行われるようになるのは，明治 7（1874）年からである．明治 10（1877）年 4 月，東京開成学校は東京医学校と合併して東京大学となる．

『東京開成学校第二年報　明治七年』（明治 8 年 4 月刊）によれば，明治 7 年に法学，化学，工学の本科と予科の課程が定められた．予科課程，本科課程各三年で，各学年ごとに学科目と簡単に内容が記されている．予科の数学の内容は算術の復習，代数，幾何，三角法，代数幾何（アナリチカル，ヂヲメトリー）であるが，本科課程の工学科の「第一年　下級」の学科目の中には「高等数学」があり，その内容は四術算（quaternions）と微分積分とである．この年度に「高等数学」を担当したのは機械工学教師の Robert Henry Smith で，Edinburgh 大学出身である．この年度の微分積分の教科書は不明であるが，東京開成学校の “Calendar” [3] に記録されている試験問題から，Todhunter よりは平易な英国の書物が教科書または参考書として使用されたと考える．

『東京開成学校第三年報　明治八年』では，工学本科の「微分」に「チヤルチ氏」と注記されている．これは米国の Albert Ensign Church の [4] である．初版は 1842 年，増補版は 1861 年で，1870 年代まで版を重ねたという．微分，積分，変分法の三部から成り，Todhunter の微分学，積分学とくらべると，技巧的な問題は少なく，その点では Todhunter より平易であるが，Todhunter が

[3] “Calendar” は当該年度の便覧である（「学校一覧」と邦訳されることが多い）．

Cauchy のアイデアを取り入れているのに対して，Church は函数の冪級数展開の可能性や級数の収束性などには無頓着であり,「Cauchy 以前」の微積分の教科書である（当時は米国では Cauchy は難しいとされていた）[4]．この年度の「高等数学」は土木工学教師の James R. Wasson が担当した．Wasson は West Point 米国陸軍士官学校の出身である．

4.2. 明治初期において最も程度の高い数学が教えられていたのは，東京開成学校の物理学科，後の東京大学理学部の仏語物理学科である．これは，フランス語による「諸芸学科（polytechnique)」の計画を縮小（主として財政上の理由で）してできたもので，明治 11 年に最初の卒業生を出すが，3 回卒業生を出しただけで，明治 13 年には廃止されてしまうのである．

フランスのリセの数学級の代数では微分が扱われ，そこでは代数函数とは限らず，三角函数，逆三角函数，指数函数，対数函数などの初等超越函数も取り扱われ，また，微分の逆演算として原始函数も扱われている．仏語物理学科でもこれに準じた教育課程が編成され,「追補代数学」の中で微分が扱われ，その後に別に微分積分学が教授されている.「追補代数学」の主たる教科書は Briot（[3]）であったと思われる．

4.3 菊池大麓が明治 10（1877）年に英国留学から帰国した後は，東京大学（理学部）における数学は外国人教師によらない教育になる．

東京大学の英文の “The Calendar of the Departments of Law, Science, and Literature” の 2539 –2540 [5] (1879 – 80)，および 2540 – 41 (1880 – 81) 年のものにはそれぞれ前年度の学年末試験問題が掲載されている．菊池の微分と座標幾何の問題も収録されているが，その数年前の Smith や Wasson のものとくらべると，程度も高くなり，計算も複雑になっている．仏語物理学科の試験問題よりも技巧的な計算を要するものが多い．微分，積分はもっぱら Todhunter の書物によっている．“Calendar” の 1880 – 81 年のものには各科目の内容（Detailed Statement of the Courses of Instruction）が記されており,「純正及応用数学」の教育課程が英国流に整備されたことがわかる．

4.4. 明治 16 – 17（1883 – 1884）年度には，東京大学理学部の数学科第四年級の「高等数学」において，寺尾壽により，日本で初めて複素函数論の初歩と，初等代数の範囲を超えた確率論とが講義された．寺尾は明治 11 年仏語物理学科卒業で，卒業後フランスに留学し，Paris で天文学を F. Tisserand について学んだが，Bertrand の数学なども学んでいる.『東京大学第四年報　起明治十六年九月止明治十七年十二月』の，寺尾の申報[6] には次の記述がある．

> 数学第四年級ノ高等数学科ニ於テハ虚数ノ理論ニ基キテ諸種ノ函数ノ性質ヲ討究シ終ニ之ヲ適用シテ楕円函数ノ理論ヲ授ケ一学期ヲ以テ業ヲ卒ヘタリ此科ニ於テ本学ノ教員及卒業生ノ壽カ講義ヲ傍聴スルモノ幾ト十名ノ多キニ至リシハ甚タ栄誉トスル所ナリ独奈ンセン此科ノ深邃ナル専門家ニモ非ル壽カ能ク其ノ蘊奥ヲ極メ得ヘキニ非ス且時間ニ乏キヲ以テ十分ニ学生及傍聴者ノ意ヲ満タスコト能ハサリシハ甚タ遺憾トスル所ナリ
>
> （中略）

[4] この書物の微分の部分は岡本則録により邦訳され，岡本則録増訳『査氏微分積分学　上冊』（[5]）として明治 15 年に出版された．邦訳では技巧を要する練習問題や原著に記されていない事項などが大幅に増補され，原著とは趣の異なったものになっている．しかし，原著では不十分な収束性などについての補筆はない．邦訳で書き加えられた内容の中には，原著者が，入門書としての性格上，あえて記さなかったものがあると考える．積分と変分法の部分の邦訳は出版されなかった．小倉金之助は,「語りつぐ日本の数学」（[27] に所収）において，Church の本は Lagrange の解析函数論の影響を受けたものであると述べ,「明治十年代における日本の微積分というものは，一七 — 一八世紀における，ヨーロッパの長い微積分の歴史をコンデンスしたものでした」と述べている（[27]，pp. 335 – 336）．

[5] これはいわゆる「神武紀元」である．

[6] 申報は Report の邦訳で，当該年度における各教員の教育に関する報告書である．

> 数学及物理学第三年級ノ最小平方法科ニ於テハ首メニプロバビリテーノ諸原則ヲ授ケベルヌーリーノ定理（ふりがな：テオレム）ヲ証明シ而ル後之ヲ適用シテ誤差ノ理論及最小平方法ノ理論及応用ヲ授ケ一学期ヲ以テ業ヲ卒ヘタリ

教科書や講義内容の詳細については不明であるが，フランス系のものであったと考える．

理学部数学科の学科課程は明治21年7月に改正され，学科課程は従前のものより整備され，充実したものとなった．学科課程の改正は，留学から帰国した藤澤利喜太郎の意見を取り入れて，数学科を整備充実することが主たるねらいであったと考える．

4.5. 工部大学校は東京大学工学部の前身校の一つであるが，最初は工部省工学寮の名称で，工部に奉職する工業士官を教育する学校として明治6（1873）年に開校された．工部大学校と改称されるのは明治10（1877）年である．預科（予科）学2年，専門学2年，実地学2年の計6年が修業年限で，理論，実験・実習，実地体験を組み合わせた教育課程によって授業が行われた．明治18（1885）年12月，工部省廃止に伴い，工部大学校は文部省に移管され，翌明治19年，東京大学は工部大学校を併合し，帝国大学となる．

工部省工学寮・工部大学校において W. E. Ayrton と John Perry が方眼紙を用いて工学教育を行ったことは，単に工学教育の面からだけではなく，函数の教育の面から見ても画期的なことであった．すなわち，グラフをえがくことにより函数を視覚的に理解することができるが，「函数 = 式」の枠に止まらず，実験データなどのような数値もしくはグラフが与えられたときに，それによって表される函数や，それらのデータから函数関係を見いだすことなども教授されたのである．Perry が後年述べていることによれば，方眼紙を積極的に使用したのは1876年（明治9年）からであるが（[28]，p. 27），筆者は1875年度にも方眼紙は使用されたと考える．なお，微分積分の教育にグラフを利用することは，明治20年代の初期から，帝国大学工科大学で井口在屋によって行われた．井口は明治15年工部大学校卒業で，専門は機械工学であるが，在学中に Perry に学び，彼の影響を大きく受けている．井口はわが国における Perry の思想や「実用数学」の唱道者であった．

5．

明治期のわが国では，微分積分学の教科書としては A. E. Church，I. Todhunter，B. Williamson などの書物が用いられた．Todhunter や Williamson の書物は明治の中頃から高等中学校（高等学校）で教科書として使用された．また，これらの書物（Church は微分学の部分のみ）は邦訳も出版されている．特に長澤亀之助による Todhunter の微分学，積分学の邦訳（明治14 – 15年）は，日本語で読める本格的な微分積分学の書物の最初のものであった（ただし，英語に堪能な読者にとっては，英文の原書のほうがわかりやすかったのではないかと思われる）．

これらの書物では，函数の定義は大抵は「相伴って変化する量」である．たとえば，Church [4] では

> One variable quantity is a function of another, when it is so connected with it, that any change of value in the latter necessarily produces a corresponding change in the former.

と記されている．Todhunter の微分学（[32]）の第5版（1890年に日本で翻刻されている）では，本文第1章の冒頭に次のように記されている．

1. Suppose two quantities which are susceptible of change so connected that if we alter one of them there is a consequent alteration in the other, this second quantity is called a *function* of the first. Thus if x be a symbol to which we can assign different numerical values, such expressions as x^2 , 3^x , $\log x$, and $\sin x$, are all *functions* of x . If a function of x is supposed equal to another quantity, as for example $\sin x = y$, then both quantities are called *variables* , one of them being the *independent variable* and the other *dependent variable.* An *independent variable* is a quantity to which we may suppose any value arbitrarily assigned; a *dependent* variable is a quantity the value of which is determined as soon as that of some independent variable is known.

しかし，これらの書物では，函数の例としては，上のTodhunterからの引用にも見られるように，簡単な代数函数や超越函数などの，式で表されたものが示されているし，取り扱われるのは，大体においてこのような「式で表された函数」である．したがって，定義の文言はともかくとして，実際には「函数は式である」と理解しても，微分や積分の一通りのことを学ぶのにはさして支障はなかったと考える．

函数のグラフについては，ChurchやTodhunterには簡単な説明があるが，当時の微分積分の書物では，微分係数の幾何学的意味として，函数のグラフである曲線の接線についての説明などはあるが，函数の幾何学的表現としてのグラフよりは，曲線の微分幾何的性質や，微分法を利用しての曲線の追跡のほうが重視されていたのである．なお，函数のグラフについては，書物から見る限り，TodhunterよりはChurchのほうが注目していたと考える．

6．

前節までに述べたように，明治前期の日本においては，函数の概念は，高等数学の一分科である微分学を学ぶ際にはじめて学ばれるものであった（フランス流の代数を学ぶ場合を除く）．しかし，その頃の西欧諸国においては，高等数学のいくつかの内容も扱った数学の啓蒙書や，函数の概念を取り入れた初等代数の書物が出版されるようになってきていたのである．わが国でも，明治20年前後から，そのような種類の書物が出版されるようになった．

W. K. Clifford（1845 − 1879）の遺稿をK. Pearsonが最終的にまとめて，“The Common Sense of the Exact Sciences” が出版されたのは1885年であるが，これは翌明治19年に菊池大麓により邦訳され『数理釈義』として出版された．この第五編「運動」には，相伴って変化する二つの量の測定値から，グラフを利用してこの二つの量の間の函数関係を調べることなど，函数関係や函数のグラフについての説明がある．これは，当時にあっては，特に，一般の読者を対象とした書物としては，斬新で画期的なことであった．この部分がCliffordの草稿にあったのか，編纂者が原著者の意図を忖度して書き加えたものかは，不明である．

渡邊小三郎編『中等教育代数学教科書』（明治22年）は，フランスのリセの数学級の代数の教科書に基づいた，フランス流の代数書である．「中等教育」という表題はついているが，当時のわが国においては程度の高い書物であった．全4巻の予定であったが，出版されたのは最初の2巻であったと思われる．第一巻，「第七綱　対数」の冒頭に函数の定義が記されている．

彼，此二変数互ニ相係属シアリテ此数変スレハ彼数モ亦随テ変スルトキハ彼数ヲ名ケテ此数ノ函数ト云ヒ此数ヲ名ケテ不羈変数ト云フ

凡ソ函数ヲ示スニハ不羈変数ヲ括弧内ニ記シ f、φ、F 等ノ文字ヲ之ニ冠スルヲ以テ恒トス、而シテ是等ノ文字ハ止タ函数ト云フ意義ヲ示スモノニシテ所謂係数ニハ非サルナリ
又係属ヲ示セル式中孰レノ変数ヲ撰ンテ不羈変数ト為スモ任意タルモノト知ルヘシ
例ハ $y = f(x)$ ト記ストキハ x ハ不羈変数ニシテ y ハ x ノ函数ナリ、然レトモ若シ $x = \varphi(y)$ ト記ストキハ不羈変数ハ y ニシテ函数ハ x ナリ
期ノ如ク変数ト函数トヲ区別シタル式ヲ以テ顕ス処ノ函数ヲ名ケテ陽函数ト云ヒ $F(x, y) = 0$ ノ如ク変数雑糅セルモノヲ名ケテ陰函数ト云フ
是ニ由テ之ヲ観レバ若シ一ノ陰函数ヲ変数ノ一ニ対シテ解スルトキハ則一ノ陽函数ヲ得ルヤ明カナリ

この説明は Bertrand や Briot の代数よりは丁寧である.

フランスの H. Bos の代数教科書の, 千本福隆と櫻井房記による邦訳『中等教育代数学』(明治24年) では, 下巻で代数式の値の変化が扱われ, 二次函数や簡単な有理函数についてではあるが, 函数の増減やグラフについて, 丁寧に説明されている. Bos の本では, 最初は函数という用語は用いずに代数式の値の変化 (邦訳では, variation を「変更」と訳し,「二次三項式ノ変更」のように記されている) を説明しているが, 後には函数という用語を用いている. この書物によって代数式の値の変化やグラフについてはじめて学んだ読者もかなりあったのではないかと思われる. この本は当時, 東京物理学校での教科書であった.

英国の代数書でも, たとえば, George Chrystal の "Algebra, An Elementary Text-book for the Higher Classes of Secondary Schools and for Colleges" 全 2 巻 ([7]) の Part I (初版 1886, 第 5 版 1904) では, 有理整函数や簡単な有理函数について函数値の変動を扱い, グラフも扱われている. なお, 代数函数の定義は, Part I (第 14 章) では, 変数の代数式で表される函数を ordinary algebraical function または synthetic algebraical function と呼んでいるが, Part II (第 30 章) では, 現在用いられているのと同じ意味で, algebraic function が定義されている.

しかし, Chrystal がその後に編纂した, 2 巻本よりはやさしい書物 "Introduction to Algebra" ([9]) には, "function" が 2 巻本とは違った意味に用いられている箇所がある. 以下にその部分を引用する ([9], pp. 8 – 9).

Any concatenation of operands and operating symbols which has an intelligible meaning according to the fundamental definitions or interpretations of these operands and operating symbols, we call a **Function** of the operands in question, or of any number of them that may be selected for special notice. Thus, for example, $3 \times 2 + 6$ is said to be a function of $3, 2$, and 6; we may also say that it is a function of 3 and 2, or a function of 6 , etc.; again, $ab^2 + \sqrt{c}$ may be spoken of as a function of a, b, c ; a function of a and b ; a function of a and c ; and so on, as may be convenient.

The operands which for the moment are selected for notice are commonly spoken of as the **Variables**, and any other operands involved in the function are called in contradictinction **Constants**.

The word **Expression** is often used in the same sense as the word function, and is at times convenient. "Function" enters more conveniently into composition, *e.g.*

we can say "function of a," whereas if we use "expression," we must say "expression involving a." Moreover, "function" is the word generally used in all parts of mathematics.

It will be observed that we define a function at present synthetically, *i.e.* with reference to the operations or steps in its construction or synthesis; and it is understood that the number of such operations is finite. As the student proceeds, he will find that the notion of a function is gradually extended. Whenever it is necessary for clearness to do so, we may more fully describe the kind of function which can be constructed by means of a finite number of the algebraic operations as a Synthetic Algebraic Function. Synthetic indicates that the function is to be constructed by steps or operations; Algebraic means, of course, that the operations are to be merely one or more of the five algebraic operations above enumerated. In the meantime, we may call any function, which is not an algebraic function, a **Transcendental Function**.

"Function"という語の，この引用文の最初のパラグラフにあるような使い方は，ドイツのLübsenの書物（[23]）でも見られる[7]．それはJohann Bernoulliの定義:「ある変化量といくつかの定量を用いて何らかの仕方で組み立てられた量をその変化量の函数という」に由来する[8]．従って，当時はまだ一部で"function"という語がこのように使われていたとも思われるが，詳細は不明である．Chrystalの代数の2巻本のほうには，所々に歴史的な説明をあるが，その部分を含めて，"function"という語のこのような使い方はない．Chrystalがやさしい方の代数の書物になぜ旧式な"function"の定義を最初に述べたかについての理由はわからない．なお，Chrystalの代数では，函数のグラフに関する説明は，2巻本よりは"Introduction"のほうが丁寧である[9]．

7．

わが国が近代的な教育制度を採用したのは明治5（1872）年の「学制」によってであるが，学制と関連の諸法令は制定されても，当初はそれを完全に実施するのには無理があり，明治初期には法令もしばしば改められた．明治19（1886）年に師範学校令，小学校令，中学校令，諸学校通則が制定され，関連の諸法令も制定されて，学校制度は整備され，これ以降，教育機関も教育内容も充実していったのである．明治19年の中学校令によれば，中学校は尋常中学校と高等中学校と

[7]Lübsenのこの書物は，明治5年8月の「外国教師ニテ教授スル中学教則」において，ドイツ語で教授する場合の算術，代数の教科書として例示されている．

[8]ロシアのペテルスブルグの科学アカデミーの書庫に保管されているEulerの未公表の手稿の中に，函数の定義が記されているもの（1727年に書かれたものと推定されている）があり，「一個もしくはもっと多くの個数の量から何らかの仕方で組み立てられる量は，その一個の量，もしくはそれらの量の函数と呼ばれる」と記されているとのことである（[31], pp. 52 – 53）．この定義のほうがJohann Bernoulliのものよりは上に引用したChrystalの"Introduction"の最初に記されている定義やLübsen [23]のものには近いが，Eulerの手稿は未公表のものであるから，これがChrystalに影響を及ぼすことはなかったと考える．

なお，ラテン語のfunctio，およびそれに相当する語（英語のfunctionなど）は，今日の数学では「函数」と訳されるのが慣例であるが，Johann BernoulliやEulerの手稿などでのfunctioのの意味する内容は，今日数学で用いられる「函数」とはいささか異なるので，あるいは別の訳語を考案して用いるほうがよいかもしれない．

[9]Chrystalの代数の,「大」（2巻本）の第1巻は上野清,「小」（"Introduction"）は長澤亀之助により邦訳された（上野による「大」の第2巻の邦訳が出版されたかどうかは不明）．長澤の邦訳は原著者の承認を得たものであり，巻頭に邦訳に際しての原著者の序文（の邦訳）と，原著者の肖像写真がつけられている．長澤は明治14年にTodhunterの微分学を邦訳しており，TodhunterとChrystalの「小」とでは函数の定義に違いがあるが,「小」の邦訳では長澤は何もそのことについてはふれていない．原著を邦訳することに専念し，自分の考えを述べることは差し控えたとも思われるが，詳細はわからない．

に分けられ，高等中学校は文部大臣が管理し（いわゆる「官立」で）全国で5校，尋常中学校については，第六条に「尋常中学校ハ各府県ニ於テ便宜之ヲ設置スルコトヲ得但其地方税ノ支辨又ハ補助ニ係ルモノハ各府県一箇所ニ限ルヘシ」と規定されていた．修業年限は，尋常中学校は5年，高等中学校は2年である．尋常中学校の数学の内容は，算術，代数，幾何，三角法であった．

明治24年12月，中学校令が改正され，第六条は「尋常中学校ハ各府県ニ於テ一校ヲ設置スヘキモノトス但土地ノ情況ニ依リ文部大臣ノ許可ヲ得テ数校ヲ設置シ又ハ本文ノ一校ヲ設置セサルコトヲ得」と改められた．また，明治27年6月,「高等学校令」が制定・公布され，高等中学校は高等学校と改称され，修業年限も改められた（帝国大学への進学のための課程「高等学校大学予科」の修業年限は3年となった）．

明治32（1899）年2月，中学校令が全面改正され，尋常中学校が中学校となった．改正された中学校令の，最初の二条は次の通りである．

第一条　中学校ハ男子ニ須要ナル高等普通教育ヲ爲スヲ以テ目的トス

第二条　北海道及府県ニ於テハ土地ノ情況ニ応シ一箇以上ノ中学校ヲ設置スヘシ
文部大臣ハ必要ト認ムル場合ニ於テ府県ニ中学校ノ増設ヲ命スルコトヲ得

ついで関連の諸法令が制定・公布された．明治34年3月には「中学校令施行規則」が制定された.「施行規則」には各学科の目的と内容の大枠も示されている．数学科については，第七条に

第七条　数学ハ数量ノ関係ヲ明ニシ計算ニ習熟セシメ兼テ思考ヲ精確ナラシムルヲ以テ要旨トス
数学ハ算術、代数初歩平面幾何ヲ授クヘシ

とある．この「施行規則」は翌明治35（1902）年2月に改正され，数学の内容（第七条第二項）については,「数学ハ算術、代数幾何及三角法ヲ授クヘシ」と改められた．また，施行規則の改正とあわせて「中学校教授要目」が制定された．数学の教授要目は算術，代数，幾何，三角法に分けて記され，最後に「教授上ノ注意」全11項目が記されているが，その中に次の文言がある．

一　数学ヲ授クルニハ常ニ精確ナル言語ヲ用ヒテ法則、命題等ノ宣言証明ヲナシ正確ニ理会セシメンコトヲカムヘシ
五　算術ヲ授クル際法則ノ理由ヲ充分ニ理会セシメ難キ場合ニ於テハ単ニ其ノ一端ヲ指摘スルニ止メ直ニ法則其ノ物ニ移リ其ノ厳格ナル理由ノ説明ハ之ヲ代数ニ譲ルヘシ
七　幾何ヲ授クルニハ論理ノ厳格ヲ重ンスヘシ例之ハ比例論ヲ授クル場合ノ如キ濫ニ簡易ニ就カントスル為之ヲ省略シ若ハ之ヲ曖昧ニ附シ去ル弊ニ陥ラサランコトヲ要ス但生徒学力ノ進度ニ依リ一時之ヲ仮定シテ後回シトナスハ妨ゲナシ

この教授要目は，算術，代数，幾何，三角法それぞれの分科の特徴と固有の方法とを重視して，初等数学を順序立ててきちんと教授するという趣旨で作成されており，菊池と藤澤利喜太郎，特に藤澤の数学教育に対する考え方が強く反映されている．函数については，三角法に「圓函数」という用語が見られるだけである（この教授要目では「三角函数」という用語は用いず,「圓函数」である）．

この教授要目が制定・公布されたのは明治35（1902）年2月であるが，その前年の9月に，英国のGlasgowで開催されたBritish Associationの集会において，John Perryは“The Teaching of Mathematics”という講演を行い,「有用性」をキーワードとして，伝統的な枠組みにとらわれることなく，数学教育の抜本的改革をなすべきことを強く主張したのである．ただし，Perryのいう「有用性」は単に目先の役に立つというだけのものではない．小倉金之助は，後に『数学教

育史』(1932) において，明治35年は「欧米諸国に於ては，数学教育の改造運動が，既に其の烽火を上げた時機であった」と述べ，ついで

> 而も此時期に於て最初の統一を見た日本の数学教育は，文部大臣菊池大麓の下に，大学教授藤澤利喜太郎等の所説に従って，欧米の改造運動とは，餘りにも其の方向を逆にしたものであった．その精神は真摯であり，その方法は着実ではあったが，併しその方向は世界の大勢に逆行せるものであった．

と記している．しかし，これは後になってからの批判である．当時のわが国では，中学校において初等数学をきちんとした形で学ばせることが重要であったのである．また，教授要目作成の過程で，欧米諸国における数学教育改造の動き，特にPerryの講演の趣旨を参考にするかどうかについては，それを検討する時間的余裕はなかったと思われる．

しかしながら，当時にあっても明治35年の教授要目の「分科主義」に対する批判はあり，たとえば，明治37，38年頃の，林鶴一や高木貞治編纂の教科書の序文には，科目相互間の連絡を図ったことが記されている．林の教科書のシリーズ名は『新撰統合数学教科書』である．「統合」という言葉が用いられていることは注目してよいであろう．

藤澤は代数の中で代数式の値の変動を扱うこと，特にそれを学校数学に取り入れること，したがって中学校の数学の内容に函数の概念を取り入れることについては否定的な考えをもっていたが，藤澤編纂の『続初等代数学教科書』(明治33年) には，簡単で控えめ (別のいい方をするならば，消極的) ではあるが，「函数」という用語と，簡単な多項式や有理式で表される函数について，値の変化や極大極小が扱われている．同書178ページには次のように記されている．

> 変数 x ヲ含ミタル代数式アリ，今之ヲ y ト名ヅクレバ，x ニ或ル値ヲ与フル毎ニ恒ニ之ニ対応スル y ノ値ヲ得ベク，x ノ値ノ変化スルニ連レテ y ノ値モ亦変化スベシ，而シテ y ノ値ノ変化ガ x ノ値ノ変化ニ関聯スルコトニ着目シテイフ場合ニ於テハ，y ハ x ノ函数ナリトイフ
>
> 函数トイフ辞ハ広ク数学全体ニ通ジテ用ヰラルルモノニシテ，代数式ノ外ニ尚ホ初学者ノ未ダ学バザル種種ノ函数アリ，乃代数式ハ函数ノ格段ナル一種類ナリト知ルベシ

しかし，グラフについてはふれられていない．また，函数の値の変化や極大，極小を十分に論じるのは初等代数学の範囲外であるから，本書の程度において論じうる極大極小についての所論に不十分なところがあるのは免れないと述べている．なお，藤澤の代数教科書では，『続初等代数学教科書』まで含めて，比例式は扱うが，(函数としての) 比例関係についてはふれられていない．比例関係については，算術教科書で，算術の枠組みの中で扱われているだけである．

高木貞治『高等教育代数学』(明治39年) は，表題からは高等学校用の教科書のように見えるが，そうではない．緒言には「此書ハ初等教科ノ代数学ト所謂純正代数学トノ中間ニ介在シテ，初等代数学ノ問題ヲ解釈スルノ間ニ於テ，純正代数学ノ精神ヲ発揮センコトヲ勉メタリ」とある．全体は三部から成るが，最終の第三部は「最簡単ナル有理式ノ変動ヲ論ス．厳密ニ言フトキハ，コハ函数論上ノ問題ニシテ初等ノ方法ニヨリテ充分之ヲ解釈センコトハ頗ル困難ナリト雖，習慣上，初等代数学ニ於テ其一班ヲ説クヲ常トシ，且方程式ノ理論ノ側面観トシテハ，最有効ナルモノナルカ故ニ，此書又之ヲ欠クコトヲ得サリシナリ」と記されている．

高木はこの書物で函数という用語は用いていないが，「簡単ナル有理式ノ変動」を扱うに際して，初等的な有理函数に限っての説明ではあるが，函数の概念とグラフについて丁寧に説明している．

当時の日本語で読める数学書の中で，函数の概念とグラフについての説明は，函数という用語は出さず，簡単な有理函数に限っての説明ではあるが，高木のこの本が最も明確で丁寧である．緒言で「有理式ノ変動」について，「習慣上，初等代数学ニ於テ其一班ヲ説クヲ常トシ」と記しているが，当時の中学校の代数の教科書では，グラフは扱われていなかった．また，「方程式ノ理論ノ側面観トシテハ，最有効ナルモノ」と記しているが，これは函数の概念やグラフの数学教育上における意義についての言明である．

8.

8.1. 明治43（1910）年5月，師範学校教授要目が制定された．数学については，内容は算術，代数，幾何（鋭角の三角函数，直角三角形の解法を含む），および小学校における教授法であるが（ほかに男子に対しては簿記が加えられている），中学校教授要目とは異なり，科目に分けずに学年ごとの内容が示されているだけであり，末尾の「注意」（全5項目）の中の一つに，「算術、代数、及幾何ハ相互ノ聯絡ヲ図リ殊ニ代数及幾何ヲ授クル際算術ニ関スル事項ヲ正確ニ理解セシムヘシ」とある．

この教授要目に準拠して編纂された高木の数学教科書『師範教育数学教科書［算術及代数］』の「例言」（明治43年10月）には次のような記述がある．

> 中等教育の数学科に於て算術，代数，幾何，三角法といふが如き分科を立つることを廃止して，これらを相連絡せる一科となすべきことは，編者が年来懐抱せる意見にして，新定の師範学校教授要目によりて其が実際の教授に試験せらるるの機会を得たることは，編者の私に喜ぶところなり。

ここに「編者が年来懐抱せる意見にして」とあるが，高木がいつ頃からこのような考えをもつようになったかについて，高木自身が記しているものは見当たらないので，正確にはわからない．Göttingen で Klein の講義に接してからとも思われるが．もっと早い時期かもしれない．

8.2. 明治44（1911）年7月，中学校令施行規則が改正され，数学科の要旨（第七条第一項）は次のように改められた．

> 数学ハ数量ニ関スル知識ヲ与ヘ計算ニ習熟セシメ応用ヲ自在ナラシメ兼テ思考ヲ精確ナラシムルヲ以テ要旨トス

「応用ヲ自在ナラシメ」という文言が加えられたことは注目してよいと考える．あわせて中学校教授要目が改正された．改正された教授要目では，数学の教授要目の冒頭に

> 数学ハ算術・代数・幾何・三角法ニ分チ各学年ニ対シテ教授事項ヲ配当スト雖モ常ニ相互ノ聯絡ヲ図リテ教授シ特ニ算術ニ関スル複雑ナル事項ハ代数及ビ幾何ヲ授クル場合ニ之ヲ教授スヘシ

とある．「常ニ相互ノ聯絡ヲ図リテ教授シ」という文言が記されたことは注目すべきであろう．

実際，これ以降，中学校の数学教科書では，各分科間，特に代数と幾何との関連が図られるようになる．そして，それとも関連して，函数の概念が導入されるようになったのである．中学校の代数の教科書に函数の概念が導入されたのは，大正2（1913）年の発行の林鶴一と国枝元治のもの（文部省の検定を受けて，大正3年から使用された）が最初であると考える．

国枝の教科書では，二次方程式を学んだ後に，第4学年の「比及比例」で，比例式から（函数としての）比例関係を導き，ついで函数の概念を導入し，簡単な函数についてグラフを扱っている．他方，林の教科書では，一次方程式よりも前の「代数式」で代数式の値の変化を図示することからグラフが導入され，一次方程式を扱う際に一次函数のグラフを扱うなど，代数教授の初期の段階（第2学年）から函数の概念が導入されている．

国枝の教科書では，序に次のように記されている．

> 茲ニ注意ヲ喚起シ置キ度ハ比例ノ応用トシテ数ノ図表示ノ一章ヲ設置シタルコトナリ．之ハ従来ノ中等学校数学教科書ニハ未ダ見ザルトコロナリト雖モ時勢ノ進運ニ応ジ斯ノ如キ事項ハ何等カノ形式ノ下ニ中等学校ニ於テ教授スベキモノト信ズルヲ以テ其ノ概要ヲ掲載スルコトトシタリ．又之ヲ掲載スルコトハ文部省教授要目ノ趣旨ニモ決シテ抵触スルモノニハアラズト信ズ．尤モ其ノ理論タルヤ多少高尚ニ亘ルノ嫌無キニアラズ．故ニ生徒学力ノ進度，時間ノ都合等ニヨリ之ヲ省略スルモ他ノ部分ノ教授ニ何等ノ差支ヲモ生ゼザル様之ヲ編纂シ置キタリ．

函数は次のように定義される．

> 一般ニ変数 x ノ値ガ定マルニ従テ或法則ノ下ニ変数 y ノ値ガ定マルトキハ y ハ x ノ函数ナリト云フ．又此場合ニ x ヲ独立変数， y ヲ属従変数[10] ト云フ．

当時の多くの書物に見られるような「x の値が変化するに従って y の値が変化する」ではなく，「変数 x ノ値ガ定マルニ従テ或法則ノ下ニ変数 y ノ値ガ定マル」という表現を用いていることは注目してよいであろう．

中学校の数学において，函数の概念をどの段階で導入し，どのような内容を教授するかについて，特に，ここに述べた国枝と林に代表される二つの方法のいずれが適当であるかについては，大正の半ば過ぎまで，いろいろと議論があったところである（なお，函数にかかわることがらの教育は，今日でもいろいろと問題がある）．

林が採用した方法の背後には，Klein の言葉「幾何学的形式での函数概念（Funktionenbegriff in geometrischer Form）は，学校数学の中心となるべきものである」がある．しかし，当時のわが国においては,「幾何学的形式での函数概念」は,「グラフを教授すること」と理解されたり,「函数概念」ではなく，代数と幾何の融合としての解析幾何の初歩を教授することと理解された場合も多かったのである．

このように,「函数概念の教育」は，初期にはしばしば「グラフ教授」に矮小化されたり，解析幾何の初歩の教授と混同されたのであるが，その後，徐々にではあるが，学校数学において,「函数」にかかわることがらの教育は改良され,「函数」の概念は次第に普及していくのである．学校数学に「函数」が大きく取り上げられ,「函数」の考えが広く一般に普及していくのは，昭和になってからである．

9．

大正2（1913）年は，函数にかかわることがらとしては，吉川實夫『函数論』の出版された年でもあった．これは日本語で記された最初の複素函数論の書物であり，本文は270ページであるが，当時の，外国語で記された他の函数論の書物とくらべてみても，特色ある書物である．序言（大正2年11月）には次のように記されている．文中「複函数」とあるのは複素函数のことである．

[10]国枝は,「従属変数」ではなく,「属従変数」という用語を用いている．

固ヨリ本書ハ僅ニ三百頁未満ニシテ，単ニ一般函数論ノ階梯ヲ與フルニ過ギズ．然レドモ本書ハ従来ノ慣例タル集合論ノ前置ヲ避ケテ，直ニ函数論ノ本体ニ入リ，順次下ノ四項ヲ論述セリ．即チ先ヅ複函数ノ微分積分ヲ以テ函数論発展ノ基礎ヲ作リ，次ニ冪級数ニ由レル（解析的）研究方法ヲ説明シ（111 頁），続イテ函数ヲ其ノ内部ノ特質ニ由リテ鑑識センコトヲ力メ（188 頁），終リニ等角写像ニ由レル（幾何学的）研究方法ヲ説述セリ．而シテ著者ハ将来更ニ楕円函数論ノ一項ヲ追加セントノ希望ヲ有ス．

本書参考スルトコロ主トシテ独逸大家ノ書ニ在リ．然レドモ又理学士和田健雄君並ニ理学士杉谷岩彦君ニ負フトコロ頗ル大ナルモノアリ．

序言にあるように，前置きなどは避けて，少ないページ数で，函数論の基礎的事項と本質的なことがらを述べた書物である．特に，基本的な解析函数として，指数函数およびその逆函数である対数函数を早い段階で導入し，対数函数に関連して Riemann 面を早い段階で（無限遠点（無究遠点）の導入より前に）導入しているのは，他の書物には見られない特徴である．「本書参考スルトコロ主トシテ独逸大家ノ書ニ在リ」と記されているが，「独逸大家ノ書」が何であるかは不詳である．Klein の講義録や著作は参考にしたと考えるが，Klein とは少し違うように思われる．1913 年は Hermann Weyl の Riemann 面の書物の第 1 版が出版された年であるが，Weyl の序文には 1913 年 4 月とあり，Weyl の著書が出版された時期と，日本にもたらされた時期を考えると，吉川は原稿作成の段階では Weyl の著書を参考にすることはできなかったと考える．しかし，Weyl は 1912 年に Göttingen で Riemann 面の講義をしており，吉川は Göttingen で Hilbert と Weyl に師事しているので（[29]），Weyl から何かの情報を得ていた可能性は否定できない．「著者ハ将来更ニ楕円函数論ノ一項ヲ追加セントノ希望ヲ有ス」と記されているが，これは吉川が大正 4（1915）年に逝去したため，果たされなかった．小倉金之助は，「語りつぐ日本の数学」（[27], p. 337）の中で，この書物を「これが日本における最初の高等数学の本じゃないかと批評した人がおります」と述べている．この書物が発行された大正 2（1913）年は，寺尾壽によって日本で最初に複素函数論の初歩が講義されてからちょうど 30 年後，『代微積拾級』がわが国にもたらされてからは 50 年余のことであった．

参考文献

[1] Bertrand, Joseph Louis François, *Traité d'Algèbre, Deixième Partie, à l'usage des classes de mathématiques spéciales*, Nouvelle éd., Paris, 1870.

[2] ボッス原著，千本福隆，櫻井房記合訳『中等教育代数学』全 2 巻，1889（明治 22 年）．

[3] Briot, Charles Auguste, *Leçons d'Algèbre, conformés aux programmes officiels de l'enseignement des lycées, Deuxième Partie, à l'usage des élèves de la classe de mathématiques spéciales*, 7 版, Paris, 1874.

[4] Church, Albert Ensign, *Elements of the Differential and Integral Calculus. Revised Edition, Containing the Elements of the Calculus of Variations*, A. S.Barnes & Co., New York, 1876.

[5] 岡本則録増訳『査氏微分積分学　上冊』，文部省，1883（明治 16 年）．

[6] 菊池大麓訳『数理釈義』，博聞社，1886（明治 19 年）．(Clifford, William Kingdon, *Common Sense of the Exact Sciences*, 1885 の邦訳)

[7] Chrystal, George, *Algebra, An Elementary Text-book for the Higher Classes of Secondary Schools and for Colleges"* 全 2 巻，London, 1886, 1889.（1999 年復刻の第 7 版が AMS Chelsea 叢書にある）.

[8] 上野　清訳『ぢー，くりすたる氏代数学』1898（明治 31 年）．

[9] Chrystal, George, *Introduction to Algebra, For the Use of Secondary Schools and Technical Colleges*, London, 1898.

[10] 英国クリスタル氏著，長澤亀之助訳『新著代数学』上下２巻，成美堂，集成堂，1901（明治 34 年）.

[11] 英国棣麼甘譔，英国偉烈亜力口訳，海甯李善蘭筆受『代数学』，咸豊９年（1859）.（巻首から巻三までは，塚本明毅による訓点版（明治５年（1872），静岡集学所）がある）.

[12] 藤澤利喜太郎講述『数学教授法講義筆記』，大日本図書，1900（明治 33 年）; 復刻版：教育出版センター，1986（昭和 61 年）.

[13] 藤澤利喜太郎編纂『続初等代数学教科書』，大日本図書，1900（明治 33 年）.

[14] 福田理軒閲註，福田半訳解『代微積拾級訳解』巻一，1872（明治５年）.

[15] 福田理軒閲，福田半編『筆算微積入門』全２冊（前集，后集），1880（明治 13 年）.

[16] 公田　藏「John Perry と日本の数学教育」，数理研講究録 1195『数学史の研究』(2001)，191 – 206.

[17] 公田　藏「明治初期の工部大学校における数学教育」，数理研講究録 1444『数学史の研究』(2005)，43 – 58.

[18] 公田　藏「明治初期の工学寮・工部大学校における数学教育」,『数学教育史研究』5（2005），26 – 37.

[19] 公田　藏「明治前期における「西洋高等数学」の教育」，数理研講究録 1546『数学史の研究』(2007)，230 – 246.

[20] 公田　藏「明治時代に学ばれたフランス流数学」，数理研講究録 1677『数学史の研究』(2010)，230 – 242.

[21] 公田　藏「高木貞治の数学教育思想」，数理研講究録 1739『数学史の研究』(2011)，1 – 14.

[22] 米利堅羅密士譔，英国偉烈亜力口譯，海甯李善蘭筆述『代微積拾級』全 18 巻，1859.

[23] Lübsen, H. B., *Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, zum Selbstunterricht und mit Rücksicht auf die Zwecke des practischen Lebens.* 1835，15 版 1872，20 版 1880.

[24] 『日本の数学 100 年史』，上，岩波書店，1983（昭和 58 年）.

[25] 小倉金之助『数学教育史』，岩波書店，1932（昭和７年）.

[26] 小倉金之助『数学史研究』第二輯，岩波書店，1948（昭和 23 年）.

[27] 小倉金之助著作集第２巻『近代日本の数学』，勁草書房，1973（昭和 48 年）.

[28] Perry, John, *Practical Mathematics, Summary of Six Lectures Delivered to Working Men*, London, 1899.

[29] 鈴木武雄「数学者吉川実夫と海軍技術中佐吉川春夫」,『数学教育研究』39（2009），大阪教育大学数学教室，105 – 124.

[30] 高木貞治『高等教育代数学』，東京開成館，1906（明治 39 年）.

[31] 高瀬正仁『無限解析のはじまり　わたしのオイラー』，ちくま学芸文庫，筑摩書房，2009（平成 21 年）.

[32] Todhunter, Issac, *A Treatise on the Differential Calculus*, London, 1852, 5 版 1871.

[33] 英国突兌翰多爾著，長澤亀之助訳述，川北朝鄰校閲『微分学』，数理書院，1881（明治 14 年）.

[34] 英国突兌翰多爾著，長澤亀之助訳述，川北朝鄰校閲『積分学』，数理書院，1882（明治 15 年）.

[35] 吉川實夫著『函数論』，冨山房，1913（大正２年）.

[36] 英国華里司輯，英国傅蘭雅口譯，金匱華蘅芳筆述『微積溯源』全８巻，1874.

[37] 寺尾　壽校閲，渡邊小三郎編纂『中等教育代数学教科書』第一，第二巻，敬業社，1889（明治 22 年）.

[38] Williamson, B. *An Elementary Treatise of Differential Calculus, Containing the Theory of Plane Curves, with Numerous Examples*, London, 7 版, 1889.